𝔻inâmica de 𝔸plicações ℂohomologicamente 𝔼xpansíveis

Armand Azonnahin

Exame de qualificação de doutorado

Programa: Matemática (IME-USP)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

São Paulo, 10 de junho de 2019

$\mathbb{D}$inâmica de $\mathbb{A}$plicações $\mathbb{C}$ohomologicamente $\mathbb{E}$xpansíveis
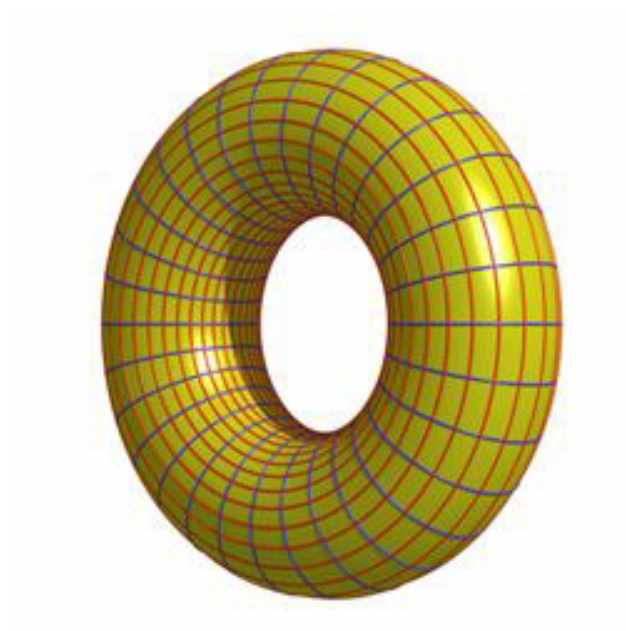
Figura 1: *Exemplo de Toro* $\mathbb{T}^3$

$\mathbb{D}$inâmica de $\mathbb{A}$plicações $\mathbb{C}$ohomologicamente $\mathbb{E}$xpansíveis

Comissão Julgadora:

MEMBROS TITULARES

- Prof. Dr. Edson de Faria (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Fabio Armando Tal - IME-USP
- Prof. Dr. Ricardo dos Santos Freire Junior - IME-USP

MEMBROS SUPLENTES

- Prof. Dr. Ali Tahzibi - ICMC-USP
- Prof. Dr. Benito Frazao Pires - UFSCar
- Prof[a]. Dr[a]. Ketty Abaroa de Rezende -UNICAMP
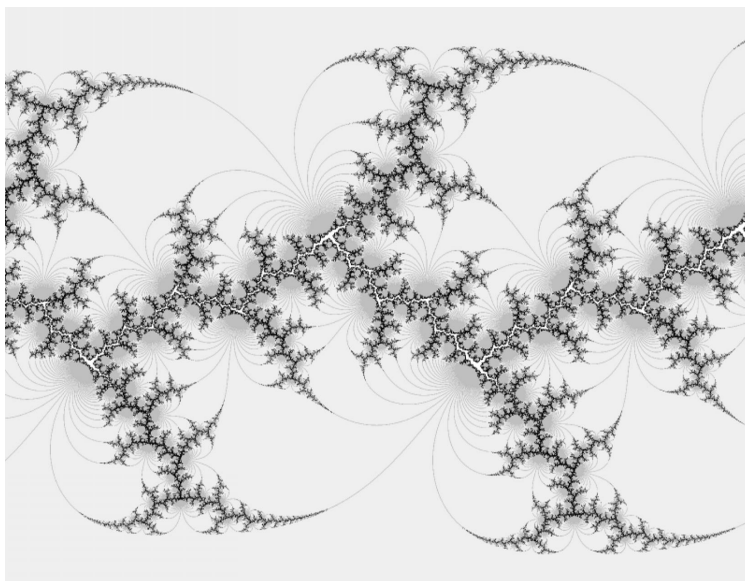
Figura 2: *Exemplo de Conjunto de Julia*

Agradecimentos

Agradeço infinitamente aos Senhores Prof. Dr. Edson de Faria, Prof. Dr. Fabio Armando Tal, Prof. Dr. Ricardo dos Santos Freire Junior , Prof. Dr. Ali Tahzibi, Prof. Dr. Benito Frazao e à Senhora Prof^{a}. Dr^{a}. Ketty Abaroa de Rezende por fazerem parte da Comissão Julgadora .

Meus Sinceros Reconhecimentos vão para a CAPES , a CPG e a CCP-MAT (IME-USP) pela oportunidade.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

"Le Soleil qui a fait son apparition dans le Ciel ne revient jamais en arrière et la Rivière qui a choisi son cours, l'a choisi pour de bons. Il est du Soleil et de la Rivière comme de mes Idées, elles ne sauraient revenir en arrière et reapparaître sous un nouveau jour. "

São Paulo, 10 de junho de 2019

Resumo

AZONNAHIN, A. **$\mathbb{D}$inâmica de $\mathbb{A}$plicações $\mathbb{C}$ohomologicamente $\mathbb{E}$xpansíveis**.

2019. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Consideremos $f : X \longrightarrow X$ uma Aplicação Cohomologicamente Expansível [1] de uma variedade Kähleriana complexa conexa e compacta com $dim_{\mathbb{C}}(X) = k \geq 1$. Queremos estudar a dinâmica de tal aplicação de um ponto de vista probabilístico, ou seja, vamos tentar descrever o comportamento assintótico da órbita $O_f(x) = \{f^n(x), n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}\}$ de um ponto genérico. Para isso, usando os métodos pluripotenciais, vamos construir uma medida de probabilidade canônica invariante natural μ_f de entropia máxima tal que $\lambda_{\max}^{-n}(f^n)^\star\Theta \longrightarrow \mu_f$ para cada medida de probabilidade suave Θ em X com $\lambda_k := \limsup_{n\longrightarrow\infty}\{||(f^n)^\star||^{\frac{1}{n}}\}$ o número de pré-imagens de um ponto genérico de X por f. Depois vamos estudar as principais propriedades estocásticas de μ_f e mostrar, se possível, que μ_f é uma medida de equilíbrio, suave, hiperbólica, ergódica, mixing, $\mathbb{K}$-mixing, exponencial-mixing, moderada e a única medida de entropia máxima, absolutamente contínua em relação à medida de LEBESGUE e à medida de HAUSDORFF sob determinadas hipóteses. Por outro lado, vamos introduzir o conceito de Medida Perfeita e $\mathbb{K}$-Perfeita e mostrar de fato que μ_f é $\mathbb{K}$-Perfeita. Também vamos nos interessar por problemas de equidistribuição e mostrar em particular que μ_f reflete uma propriedade de equidistribuição dos pontos periódicos. Finalmente vamos estudar os invariantes numéricos e mostrar a maximalidade da entropia, a inexistência de expoentes de Lyapunov negativos ou nulos sob determinadas hipóteses e tentar encontrar boas estimativas para a dimensão de μ_f.

Palavras-chave: Dinâmica Complexa, Aplicação Cohomologicamente Expansível, Grau Topológico, Medida Invariante Natural $\mathbb{K}$-Perfeita , Equidistribuição .

[1] cf Definição fundamental mais adiante.

Abstract

AZONNAHIN, A. **$\mathbb{D}$ynamics of $\mathbb{C}$ohomological $\mathbb{E}$xpanding $\mathbb{M}$appings**. 2019. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Let $f : X \longrightarrow X$ be a Cohomological Expanding Mapping of a complex compact connected Kähler manifold with $dim_{\mathbb{C}}(X) = k \geq 1$. We want to study the dynamics of such mapping from a probabilistic point of view, that is, we will try to describe the asymptotic behavior of the orbit $O_f(x) = \{f^n(x), n \in \mathbb{N} \text{ or } \mathbb{Z}\}$ of a generic point. To do this, using pluripotential methods, we will construct a natural invariant canonical probability measure of maximum entropy μ_f such that $\lambda_{\max}^{-n}(f^n)^{\star}\Theta \longrightarrow \mu_f$ for each smooth probability measure Θ in X with $\lambda_k := \limsup_{n\longrightarrow\infty}\{||(f^n)^{\star}||^{\frac{1}{n}}\}$ the number of pre-images of a generic point of X per f. Then we will study the main stochastic properties of μ_f and show, if possible, that μ_f is a measure of equilibrium, smooth, hyperbolic, ergodic, mixing, $\mathbb{K}$ -mixing, exponential-mixing, moderate and the only measure of maximum entropy, absolutely continuous with respect to the LEBESGUE measure and to the HAUSDORFF measure under certain hypotheses. On the other hand, we will introduce the concept of Perfect and $\mathbb{K}$-Perfect Measure and indeed show that μ_f is $\mathbb{K}$-Perfect. We will also be interested in equidistribution problems and show in particular that μ_f reflects a property of equidistribution of periodic points. Finally we will study the numerical invariants and show the maximality of the entropy, the inexistence of negative or zero Lyapunov exponents under certain hypotheses and try to find good estimates for the dimension of μ_f .

Keywords: Complex Dynamics, Cohomological Expanding Mapping , Topological Degree , Natural Invariant $\mathbb{K}$-Perfect Measure, Equidistribution.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Dinâmica Complexa Unidimensional , isto é, a Dinâmica dos Mapas Racionais em $\mathbb{P}^1$, está bem desenvolvida e atingiu de alguma forma a sua maturidade ([119], [118]). Suas principais ferramentas são o Teorema de Montel em Famílias Normais, o Teorema de Mapeamento Mensurável de Riemann e a Teoria dos Mapas Quase-Conformes, confira por exemplo Beardon, Carleson-Gamelin [123] [47] . Para lidarmos com mapas em várias variáveis, tais ferramentas não são mais válidas: a hiperbolicidade de uma variedade de Kobayashi e a possibilidade de aplicar argumentos de famílias normais são mais difíceis de serem verificadas. Os mapas holomorfos em várias variáveis não são conformes e também o teorema de mapeamento mensurável de Riemann não se aplica.

A teoria em Dimensão Superior é desenvolvida usando principalmente a Teoria Pluripotencial, ou seja, a Teoria das Funções Plurisubharmônicas (p.s.h. para abreviar) e também a Teoria das Correntes Fechadas Positivas. A propriedade de compacidade de Montel é substituída pelas propriedades de compacidade de funções p.s.h ou quase-p.s.h . Outra ferramenta crucial é o uso de boas estimativas para a equação dd^c em vários cenários. Uma das principais ideias é: para estudar o comportamento estatístico das órbitas de um mapa holomorfo, consideramos sua ação em alguns espaços funcionais apropriados. Decomponhamos então a ação na parte "harmônica" e na "não-harmônica". Isso é feito resolvendo uma equação dd^c com estimativas. A parte não harmônica da ação dinâmica pode ser controlada graças as boas estimativas para as soluções de uma equação dd^c. A parte harmônica pode ser tratada usando a desigualdade de Harnack no cenário local ou a ação linear de mapas em grupos de cohomologia no caso de dinâmica em variedades compactas de Kähler. Esta abordagem ,por exemplo, permitiu dar uma teoria satisfatória para as propriedades ergódicas dos sistemas dinâmicos holomorfos e meromorfos: a construção da medida de entropia máxima, o decaimento das correlações, o teorema do limite central, o teorema dos grandes desvios, etc., em relação à essa medida.

Para usarmos os métodos pluripotenciais, vamos ser levados a desenvolver o cálculo em correntes fechadas positivas.

O principal problema no estudo dinâmico de um mapa é entender o comportamento das órbitas dos pontos sob a ação desse mapa. Exemplos simples mostram que, em geral, há um conjunto (Conjunto de Julia) onde a dinâmica é instável: as órbitas devem divergir exponencialmente. Além disso, a geometria do conjunto de Julia é em geral muito selvagem.
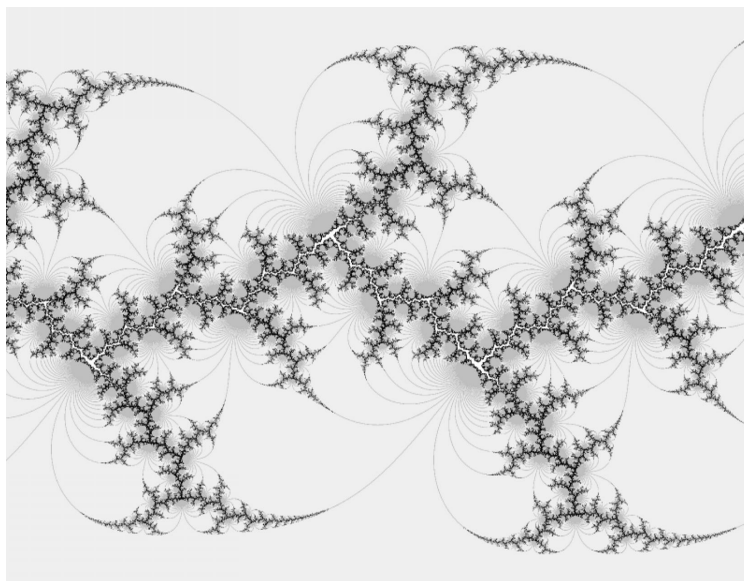
Figura 1.1: *Exemplo de Conjunto de Julia*

Para estudarmos os sistemas dinâmicos complexos, vamos seguir os conceitos clássicos. Vamos introduzir e estabelecer propriedades básicas de alguns invariantes associados ao sistema, como a entropia topológica e os graus dinâmicos que são os análogos dos indicadores de crescimento de volume no cenário dinâmico real. Esses invariantes vão dar uma classificação aproximada do sistema. O fato notável em dinâmica complexa é que eles podem ser calculados ou estimados em muitas situações não triviais.

Uma questão central em dinâmica é a construção de medidas invariantes interessantes, em particular medidas com entropia positiva. A entropia métrica é um indicador da complexidade do sistema em relação a uma medida invariante. Nós vamos focar uma parte do nosso estudo na medida de entropia máxima. Seu suporte é, em certo sentido, a parte mais caótica do sistema. Para os mapas que consideramos aqui, medidas de entropia máxima vão ser construídas usando métodos pluripotenciais e outras ferramentas quando necessário. Para endomorfismos em $\mathbb{P}^k$, elas podem ser obtidas como auto-interseções de algumas $(1,1)$- correntes fechadas positivas invariantes (correntes de Green). Vamos dar algumas estimativas sobre a dimensão de Hausdorff e sobre os expoentes de Lyapunov dessas medidas. Os resultados vão mostrar o comportamento na parte mais caótica do sistema. Os expoentes de Lyapounov vão provavelmente ser mostrados como estritamente positivos. Isso significará, em certo sentido, que o sistema é expansivo em todas as direções, apesar da existência de um conjunto crítico.

Uma vez que a medida de entropia máxima é construída, vamos estudar suas propriedades dinâmicas finas. As órbitas típicas podem ser observadas usando funções de teste. Sob a ação do mapa, cada observável fornece uma seqüência de funções que podem ser vistas como variáveis aleatórias dependentes. O objetivo é mostrar que a dependência é fraca e então estabelecer propriedades estocásticas que são conhecidas para as variáveis aleatórias independentes na teoria da probabilidade. Mixing, decaimento de correlações, teorema do limite central, teoremas de grandes desvios, etc. , vão ser provados para a medida de entropia máxima. É crucial aqui que as correntes de Green e as medidas de entropia máxima sejam obtidas usando um processo iterativo com estimativas; podemos então vincular a velocidade da convergência.

Outro problema, considerado nesta Tese, é a equidistribuição de pontos periódicos ou de pré-imagens de pontos, no que diz respeito à medida de entropia máxima e também a equidistribuição de variedades em relação às correntes de Green. Os resultados nessa direção podem fornecer algu-

mas informações sobre a rigidez do sistema e também algumas propriedades ergódicas fortes que a medida de entropia máxima ou as correntes de Green satisfazem. Os resultados podem ser semelhantes aos do segundo teorema na teoria de distribuição de valores e devem ser úteis afim de estudar os análogos aritméticos . Vamos dar provas completas para a maioria dos resultados, mas os resultados da equidistribuição de hipersuperfícies vão provavelmente usar super-potenciais, em particular, a equidistribuição de subvariedades de maior codimensão.

1.1 Considerações Preliminares

[11] [12]

Seja X uma variedade Kähleriana complexa conexa e compacta com $dim_{\mathbb{C}}(X) = k \geq 1$ e $f : X \longrightarrow X$ uma Aplicação Cohomologicamente Expansível [1] . Queremos estudar a dinâmica da aplicação f , ou seja, descrever estatisticamente o comportamento das órbitas $O_f(x) = \{f^n(x), n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}\}$. Para isso, é preciso responder tanto para as questões (aparentemente) elementares:

- existem pontos periódicos? quantos? de que tipo ?
- como eles são distribuídos no espaço?

quanto para questões mais delicadas da Teoria Ergódica:

- qual é a complexidade (entropia topológica) do sistema (f, X) ?
- existe uma (única?) medida de entropia máxima?
- quais são as suas propriedades ergódicas (ergodicidade, mixing, hiperbolicidade, ...)?

Quando X é uma superfície de Riemann, a resposta a estas questões depende apenas do grau topológico $deg(f)$ do mapa f: quando $deg(f) = 1$, a dinâmica é fraca e é calculada manualmente. Quando $deg(f) \geq 2$, tem o seguinte resultado (adaptado) devido a H.Brolin [76] (caso polinomial) e M.Lyubich [134] (veja também [6]):

Teorema A. Se $dim_{\mathbb{C}}(X) = 1$ e $deg(f) \geq 2$, então existe uma medida de probabilidade invariante canônica μ_f que satisfaz :

- μ_f é a única medida de entropia máxima

$$h_{top(f)} = h_{\mu_f}(f) = \log deg(f) > 0$$

- μ_f é mixing, de expoente de Lyapunov

$$\chi(\mu_f) \geq \frac{1}{2} \log deg(f) > 0$$

- Existem $(deg(f))^n + 1$ pontos periódicos de ordem n. Todos - exceto um número finito - são repulsivos e equidistribuídos de acordo com a medida μ_f .

[1] cf Definição fundamental mais adiante.

O propósito desta Tese é estabelecer um resultado similar ao Teorema A quando X é de dimensão $k \geq 2$: procuramos por uma condição numérica que garanta a existência de uma medida canônica dinamicamente interessante .

No fim do século **XX** , E.Bedford, J.E.Fornaess, J.H.Hubbard , M.Lyubich, N.Sibony e J.Smillie construíram e estudaram tal medida μ_f para duas famílias particulares (mas decisivas) de transformações: as aplicações de Hénon complexas (i.e. os automorfismos polinomiais de $\mathbb{C}^2$ de entropia positiva), e os endomorfismos holomorfos do espaço projetivo complexo $\mathbb{P}^k$. As dinâmicas correspondentes são muito diferentes: no primeiro caso, os pontos periódicos selas são equidistribuídos de acordo com μ_f, enquanto que no segundo caso, são os pontos repulsores que desempenham um papel decisivo (um resultado mais recente de J.Y.Briend e J.Duval [98], [99]).

Esta diferença é parcialmente explicada pelos respectivos valores dos graus dinâmicos dessas aplicações.

Graus dinâmicos. Seja $f : \mathbb{P}^k \longrightarrow \mathbb{P}^k$ uma transformação racional do espaço projetivo complexo $\mathbb{P}^k$. Definimos, para $0 \leq j \leq k$, o j-ésimo grau dinâmico de f por :

$$\lambda_j(f) := \lim_{n \to +\infty} \inf [deg f^{-n} L]^{1/n}$$

onde L denota um subespaço linear genérico de $\mathbb{P}^k$ de codimensão j.

Note que $\lambda_k(f)$ é o grau topológico de f e que $\lambda_0(f) = 1$. Quando f é um endomorfismo holomorfo, verificamos que $\lambda_j(f) = \lambda_1(f)^j$, assim $\lambda_k(f)$ é o maior grau dinâmico de f. No contrário, para uma aplicação de Hénon complexa f, temos que $\lambda_1(f) > \lambda_2(f) = 1$ $(k = 2)$.

Lembraremos da definição dos graus dinâmicos de uma transformação meromorfa $f : X \longrightarrow X$ de uma variedade Kähleriana compacta qualquer mais adiante.
São os quocientes

$$\lambda_j(f))/\lambda_{j+1}(f)$$

que desempenham um papel crucial nos fenômenos de equidistribuição: estes ocorrem quando

$$\lambda_j(f))/\lambda_{j+1}(f) \neq 1.$$

Diremos que f é **cohomologicamente hiperbólica** quando esta condição é satisfeita para $0 \leq j \leq k-1$. Resulta das propriedades de concavidade da função $j \mapsto \log \lambda_j(f)$ que esta condição é équivalente à existência de um número inteiro $l \in [1, k]$ tal que $\lambda_l(f)$ domine estritamente todos os outros graus dinâmicos.

Em dimensão $k = 1$, f é cohomologicamente hiperbólica se e somente se $\lambda_1(f) > \lambda_0(f) = 1$, ou seja, quando $\lambda_1(f) = deg(f) \geq 2$. Encontramos a condição do Teorema A .
Em dimensão $k = 2$, a condição reduz-se a $\lambda_1(f)) \neq \lambda_2(f)$. Há, portanto, dois casos a serem considerados : quando $\lambda_1(f)) < \lambda_2(f)$ (maior grau topológico , por exemplo, endomorfismos holomorfos de $\mathbb{P}^2$), ou quando $\lambda_1(f)) > \lambda_2(f)$ (menor grau topológico, por exemplo, aplicações de Hénon complexas)

O trabalho a ser apresentado nesta Tese baseia-se na seguinte conjectura e vai fornecer respostas provavelmente parciais.

Conjectura:[11] [12] Seja X uma variedade Kähleriana compacta com $dim_{\mathbb{C}}(X) = k \geq 1$ e $f : X \longrightarrow X$ uma transformação meromorfa cohomologicamente hiperbólica, isto é, tal que

$\lambda_l(f) > \max_{j \neq l} \lambda_j(f)$ para um número inteiro $l \in [1, k]$. Então existe uma medida de probabilidade invariante canônica μ_f que não carrega hipersuperfícies complexas e satisfaz :

1. μ_f é a única medida de entropia máxima
$$h_{top(f)} = h_{\mu_f}(f) = \log \lambda_l(f)$$

2. μ_f é mixing e hiperbólica. Seus expoentes de Lyapunov verificam
$$\chi_1 \geq \ldots \geq \chi_l \geq \frac{1}{2} \log(\lambda_l(f)/\lambda_{l-1}(f)) > 0$$
e
$$0 > -\frac{1}{2} \log(\lambda_l(f)/\lambda_{l+1}(f)) \geq \chi_{l+1} \geq \ldots \geq \chi_k.$$

3. μ_f é uma medida de equilíbrio, suave, ergódica, $\mathbb{K}$-mixing, exponencial-mixing, moderada e absolutamente contínua em relação à medida de LEBESGUE e à medida de HAUSDORFF sob determinadas hipóteses.

4. μ_f é $\mathbb{K}$-Perfeita.

5. Existem aproximadamente $\lambda_l(f)^n$ pontos periódicos selas de tipo $(k-l, l)$. Estes equidistribuem-se de acordo com a medida μ_f.

Os resultados . A conjectura é motivada parcialmente pelos trabalhos de Bedford-Lyubich-Smillie [52], [53] que a estabeleceram ,em parte, quando f é uma aplicação de Hénon complexa, bem como os de Fornaess-Sibony [92], [93], [94] e Briend-Duval [98],[99] que lidaram parcialmente com o caso de endomorfismos holomorfos não-lineares de $\mathbb{P}^k$. Vamos esboçar a demonstração destes resultados, bem como algumas de suas generalizações.

Definição Fundamental (Armand [11] [12]). Seja X uma variedade Kähleriana complexa compacta e conexa com $dim_{\mathbb{C}}(X) = k \geq 1$ e $f : X \longrightarrow X$ um endomorfismo meromorfo dominante, ou seja, cujo jacobiano não é identicamente nulo e tal que $\lambda_l(f) > \max_{j \neq l} \lambda_j(f)$ para um número inteiro $l \in [1, k]$. Suponha, quando necessário, que X é homogênea e/ou f é algebricamente estável ou l-estável ou dinamicamente compatível.
Diremos que f é uma **Aplicação Cohomologicamente Expansível** quando $l \in [\frac{k}{2}, k]$ ou quando $l \longrightarrow \infty$.

Teorema B. A conjectura verifica-se quando $f : X \longrightarrow X$ é uma Aplicação Cohomologicamente Expansível numa variedade Kähleriana compacta e conexa X com $dim_{\mathbb{C}}(X) = k \geq 1$.

Teorema C. A conjectura verifica-se quando $f : X \longrightarrow X$ é uma transformação biracional $(\lambda_2(f) = 1)$ de uma superfície projetiva ($dim_{\mathbb{C}}(X) = 2$), mediante uma hipótese técnica.

Note que essa hipótese trata do controle quantitativo da dinâmica próximo a pontos de indeterminação (veja a próxima seção). Vamos simplesmente mencionar aqui que é ela verificada quando f é uma aplicação de Hénon complexa, um automorfismo de entropia positiva ou uma aplicação biracional genérica de $\mathbb{P}^2$.

Note também que todo endomorfismo polinomial cohomologicamente hiperbólico
$$f : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (P(z, w), Q(z, w)) \in \mathbb{C}^2$$
com
$$max(degP, degQ) \leq 2$$

satisfaz o Teorema B ou o Teorema C e assim verifica a conjectura . Da mesma forma, todo endomorfismo holomorfo cohomologicamente hiperbólico de uma superfície projetiva verifica a conjectura .

Pontos de indeterminação. As aplicações que consideramos não são, em geral, bem definidas em todo ponto de X. Existe um subconjunto analítico I_f de *codimenso* ≥ 2 consistindo de pontos em que f não é contínua. Se $p \in I_f$, sua imagem

$$f(p) := \bigcap_{\epsilon>0} \overline{f(B(p,\epsilon)\backslash I_f)}$$

é um subconjunto analítico de dimensão positiva. Procuramos descrever a dinâmica dos pontos que estão fora do conjunto iterado de indeterminação

$$I_f^\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(I_f).$$

Em geral, este conjunto pode conter uma hipersuperfície de X (mesmo que $codim_{\mathbb{C}} I_f \geq 2$). É por isso que é crucial, na conjectura enunciada acima , que a medida μ_f não carregue as hipersuperfícies de X. Além disso, os graus dinâmicos sendo invariantes por uma mudança biracional de coordenadas π, queremos ser capazes de transportar μ_f por π : é necessário que μ_f não carregue uma hipersuperfície que poderia ser contraída por π.

Vamos explicar mais adiante que não podemos nos contentar de estudar os endomorfismos holomorfos: eles são objetos raros demais. Portanto, o controle da dinâmica próxima aos pontos de indeterminação constitui uma das maiores dificuldades deste estudo.

Metodologia. A transformação $f : X \longrightarrow X$ induz ações lineares f^*,f_* por imagem inversa e direta em espaços vetoriais de cohomologia de de Rham $H^q(X,\mathbb{C})$. Como X é Kähleriana, podemos aproveitar da decomposição de Hodge. A hipótese numérica $\lambda_l(f) > max_{j\neq l}\lambda_j(f)$ permite mostrar que as ações dominantes são

$$f^* : H^{l,l}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{l,l}(X,\mathbb{C})$$

e

$$f_* : H^{k-l,k-l}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{k-l,k-l}(X,\mathbb{C})$$

Isto traduz-se, por exemplo, na fórmula do ponto fixo de Lefschetz que mostra que a taxa assintótica de crescimento dos pontos periódicos é controlada por $\lambda_l(f)$, ou ainda na majoração da entropia topológica , que dá aqui

$$h_{top(f)} \leq \log \lambda_l(f).$$

Para provar a conjectura, é natural querer usar o *princípio variacional* para exibir uma medida de entropia máxima. A presença de pontos de indeterminação implica, infelizmente, que nem sempre há igualdade no princípio variacional , pelo menos quando f não é cohomologicamente hiperbólica. Nossa **metodologia** consiste em construir uma medida invariante canônica usando a Análise Espectral das ações lineares f^* , f_* e das propriedades finas da Análise Complexa (notadamente a Teoria das Correntes Positivas), depois em estudar as propriedades ergódicas desta medida combinando ferramentas clássicas de Sistemas Dinâmicos (Teoria de Pesin) e de Geometria Algébrica Complexa (notadamente a Teoria de Hodge). A primeira parte é baseada nas seguintes observações:

- a hipótese $\lambda := \lambda_l(f) > \lambda_{l-1}(f)$ garante fenômenos de equidistribuição : Se w_l e w_l' forem duas formas suaves fechadas cohomológas de bigrau (l,l), então

$$\lambda^{-n}(f^n)^\star(w_l - w_l') \longrightarrow 0.$$

  Espera-se que elas equidistribuam-se de acordo com uma corrente positiva fechada invariante T_l^+ de bigrau (l,l), ou seja,

$$\lambda^{-n}(f^n)^\star w_l \longrightarrow T_l^+;$$

- a hipótese $\lambda := \lambda_l(f) > \lambda_{l+1}(f)$ traduz-se pela dualidade em $\lambda_{k-l}(f_*) > \lambda_{k-l-1}(f_*)$, dando de maneira semelhante fenômenos de equidistribuição por imagem direta das formas suaves fechadas w_{k-l} de bigrau $(k-l, k-l)$. Espera-se também que

$$\lambda^{-n}(f^n)^\star w_{k-l} \longrightarrow T_{k-l}^-,$$

onde T_{k-l}^- denota uma corrente positiva fechada de bigrau $(k-l, k-l)$;

- tentaremos então definir a medida canônica

$$\mu_f := T_l^+ \wedge T_{k-l}^-.$$

A segunda parte consiste em dar sentido à seguinte citação: *as propriedades geométricas de extremalidade das correntes invariantes refletem as propriedades ergódicas da medida* μ_f .

É razoável pensar que esta estratégia vai funcionar en dimensaõ dois notadamente no caso dos endomorfismos polinomiais (cf [22] e [109]). Para a dimensão $k \geq 2$, vamos seguir algumas pistas exploradas até o presente momento para chegarmos a novos resultados.

Caso não hiperbólico. Espera-se que as transformações meromorfas não cohomologicamente hiperbólicas preservem uma fibração : é o caso das transformações bimeromorfas das superfícies tais que $\lambda_1(f)) = \lambda_2(f) = 1$ (cf [107]).

Note que algumas transformações meromorfas não cohomologicamente hiperbólicas interferem na análise espectral de operadores diferenciais (Laplace, Schrödinger) , sendo operadores de renormalização (cf [31]).

Quais variedades? A conjectura levanta a questão natural de saber quais são as variedades X que admitem transformações meromorfas cohomologicamente hiperbólicas. Quando $dim_{\mathbb{C}}(X) = k = 1$ a resposta é bem conhecida: apenas as curvas elípticas e a esfera de Riemann $\mathbb{P}^1$ admitem endomorfismos holomorfos não invertíveis. Estas são as superfícies de Riemann X cuja dimensão de Kodaira $kod(X)$ é negativa ou nula. Mostraremos o

Teorema D. Se $dim_{\mathbb{C}}(X) = k = 2$ e $f : X \longrightarrow X$ é tal que $\lambda_1(f)) \neq \lambda_2(f)$, então $kod(X) \leq 0$. Mais precisamente,

- ou $kod(X) = 0$,
- ou Xé racional,
- ou X é uma superfície ajustada acima de uma curva elíptica; neste caso, f preserva a fibração racional e $\lambda_2(f)) > \lambda_1(f)$.

Podemos construir vários exemplos de transformações meromorfas $f : X \longrightarrow X$ tais que $\lambda_1(f)) > \lambda_2(f)$ (resp. $\lambda_2(f)) > \lambda_1(f)$) quando X é racional. A situação é muito mais rígida quando $kod(X) = 0$ (e menos interessante quando $X \sim \mathbb{P}^1 * E$, E curva elíptica). O caso mais importante - e o mais delicado de estudar - é então o de uma superfície X racional: basta-se estudar a dinâmica de uma aplicação racional dominante $f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ à conjugação biracional . No entanto, é interessante considerar também o caso das superfícies de dimensão de Kodaira nula. A situação é mais rica em dimensão 1 - especialmente em superfícies $K3$ - e algumas transformações que têm um grupo finito de simetrias induzem transformações em uma superfície racional (generalizando a construção de S. Lattès).

Conjecturamos, em dimensão superior, que apenas as variedades de dimensão de $Kodaira \leq 0$ admitem transformações meromorfas cohomologicamente hiperbólicas.

1.2 Objetivos

[11] [12]

Consideremos $f : X \longrightarrow X$ uma Aplicação Cohomologicamente Expansível de uma variedade Kähleriana complexa conexa e compacta com $dim_{\mathbb{C}}(X) = k \geq 1$. Queremos estudar a dinâmica de tal aplicação de um ponto de vista probabilístico, ou seja, vamos tentar descrever o comportamento assintótico da órbita $O_f(x) = \{f^n(x), n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}\}$ de um ponto genérico. Para isso, usando os métodos pluripotenciais, vamos construir uma medida de probabilidade canônica invariante natural μ_f de entropia máxima tal que $\lambda_{\max}^{-n}(f^n)^\star\Theta \longrightarrow \mu_f$ para cada medida de probabilidade suave Θ em X com $\lambda_k := \limsup_{n\longrightarrow\infty}\{||(f^n)^\star||^{\frac{1}{n}}\}$ o número de pré-imagens de um ponto genérico de X por f. Depois vamos estudar as principais propriedades estocásticas de μ_f e mostrar, se possível, que μ_f é uma medida de equilíbrio, suave, hiperbólica, ergódica, mixing, $\mathbb{K}$-mixing, exponencial-mixing, moderada e a única medida de entropia máxima, absolutamente contínua em relação à medida de LEBESGUE e à medida de HAUSDORFF sob determinadas hipóteses. Por outro lado, vamos introduzir o conceito de Medida Perfeita e $\mathbb{K}$-Perfeita e mostrar de fato que μ_f é $\mathbb{K}$-Perfeita. Também vamos nos interessar por problemas de equidistribuição e mostrar em particular que μ_f reflete uma propriedade de equidistribuição dos pontos periódicos. Finalmente vamos estudar os invariantes numéricos e mostrar a maximalidade da entropia, a inexistência de expoentes de Lyapunov negativos ou nulos sob determinadas hipóteses e tentar encontrar boas estimativas para a dimensão de μ_f.

1.3 Contribuições

[11] [12]

Considerando $f : X \longrightarrow X$ uma Aplicação Cohomologicamente Expansível de uma variedade Kähleriana complexa conexa e compacta com $dim_{\mathbb{C}}(X) = k \geq 1$.
As principais contribuições deste trabalho são as seguintes:

1. Usando os métodos pluripotenciais, construiremos uma medida de probabilidade canônica invariante natural μ_f de entropia máxima tal que $\lambda_{\max}^{-n}(f^n)^\star\Theta \longrightarrow \mu_f$ para cada medida de probabilidade suave Θ em X com $\lambda_k := \limsup_{n\longrightarrow\infty}\{||(f^n)^\star||^{\frac{1}{n}}\}$ o número de pré-imagens de um ponto genérico de X por f.

2. Estudaremos depois as principais propriedades estocásticas de μ_f e mostraremos, se possível, que μ_f é uma medida de equilíbrio, suave, hiperbólica, ergódica, mixing, $\mathbb{K}$-mixing, exponencial-mixing, moderada e a única medida de entropia máxima, absolutamente contínua em relação à medida de LEBESGUE e à medida de HAUSDORFF sob determinadas hipóteses.

3. Introduziremos o conceito de Medida Perfeita e $\mathbb{K}$-Perfeita e mostraremos de fato que μ_f é $\mathbb{K}$-Perfeita.

4. Também interessaremos-nós por problemas de equidistribuição e mostraremos em particular que μ_f reflete uma propriedade de equidistribuição dos pontos periódicos.

5. Finalmente estudaremos os invariantes numéricos e mostraremos a maximalidade da entropia, a inexistência de expoentes de Lyapunov negativos ou nulos sob determinadas hipóteses e tentaremos encontrar boas estimativas para a dimensão de μ_f.

1.4 Organização do Trabalho

Agora vamos especificar o conteúdo da Tese. No Capítulo 2, apresentaremos os conceitos fundamentais e métodos pluripotenciais.

Esboçaremos na primeira parte do Capítulo 3 a demonstração do Teorema de Brolin-Lyubich. Os elementos de prova que indicaremos são em parte originais e generalizam-se em várias variáveis. Introduziremos os graus dinâmicos $\lambda_j(f)$ na segunda parte do Capítulo 3 . Estabeleceremos algumas de suas propriedades , suas ligações com a entropia topológica , e em seguida, com o número de pontos periódicos . Daremos alguns exemplos de transformações cohomologicamente hiperbólicas.

Estudaremos na terceira parte o caso das transformações de maior grau topológico. Demonstraremos a conjectura nesse caso e daremos alguns exemplos .Estudaremos ainda alguns invariantes numéricos (dimensão da medida de entropia máxima, minimalidade dos expoentes de Lyapunov), depois estaremos interessados nas generalizações desta situação dinâmica.

Na quarta parte do Capítulo 3 , tentaremos colocar em prática nossa estratégia para provar a conjectura no caso geral de aplicações cohomologicamente expansíveis quando a variedade X é de dimensão pelo menos dois. Vários exemplos serão apresentados .

Finalmente, no Capítulo 4 discutimos algumas conclusões obtidas neste trabalho.

Capítulo 3

$\mathbb{D}$inâmica de $\mathbb{A}$plicações $\mathbb{C}$ohomologicamente $\mathbb{E}$xpansíveis

3.1 A dimensão 1 revisitada

3.1.1 A medida invariante canônica

Construção

Conjunto de Julia

Regularidade do potencial

3.1.2 Equidistribuição de pré-imagens

Decaimento das correlações

Estimativas de volume

3.1.3 Expoente de Lyapunov

3.1.4 Abordagem de Lyubich

3.1.5 O caso dos polinômios

3.2 Invariantes numéricos

3.2.1 Graus dinâmicos

3.2.2 Entropias

Entropia topológica

Entropia métrica

3.2.3 Pontos Periódicos

Fórmula de Lefschetz

Quais pontos periódicos?

Curvas de pontos periódicos

3.2.4 Quais variedades?

$kod(X) = -\infty$

$kod(X) = 0$

3.3 Aplicações Cohomologicamente Expansíveis: Alto grau topológico

3.3.1 A medida canônica

3.3.2 Propriedades ergódicas de μ_f

3.3.3 Exemplos

Endomorfismos Holomorfos

Endomorfismos polinomiais de $\mathbb{C}^k$

O método de Newton

Variedades não-racionais

3.3.4 Dimensão e expoentes de Lyapunov

3.3.5 Teorema do limite central

3.3.6 Conjunto excepcional

3.3.7 Espaço de parâmetros

3.3.8 Generalizações

3.4 Aplicações Cohomologicamente Expansíveis: Caso geral

3.5 Dimensões maiores

Capítulo 4

Conclusões

4.1 Considerações Finais

4.2 Sugestões para Pesquisas Futuras

Referências Bibliográficas

[1] A.BEAUVILLE. Complex algebraic surfaces. *London Mathematical Society Student Texts, 34. Cambridge University Press, Cambridge*, 1996.

[2] A.BEAUVILLE. Endomorphisms of hypersurfaces and other manifolds. *Internat. Math. Res. Notices*, (1):53–58, 2001.

[3] A.Blanchard. Sur les variétés analytiques complexes. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, (73):157–202, 1956.

[4] J.MILNOR A.BONIFANT, M.DABIJA. Elliptic curves as attractors in p2. *Preprint*, 2004.

[5] J.H.HUBBARD A.DOUADY. On the dynamics of polynomial-like mappings. *Ann. Sci.E.N.S. 18*, (2):287–343, 1985.

[6] R.MANE A.FREIRE, A.LOPEZ. An invariant measure for rational maps. *Bol. Soc. Brasil. Mat. 14*, (1):45–62, 1983. 3

[7] B.HASSELBLATT A.KATOK. Introduction to the modern theory of dynamical systems. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press,Cambridge*, (54), 1995.

[8] A.MANNING. The dimension of the maximal measure for a polynomial map. *Annals of Math.*, (119):425–430, 1984.

[9] B.SHIFFMAN A.RUSSAKOVSKII. Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics. *Indiana Univ. Math. J. 46*, (3):897–932, 1997.

[10] A.ZDUNIK. Parabolic orbifolds and the dimension of the maximal measure for rational maps. *Invent. Math. 99*, (3):627–649, 1990.

[11] ARMAND AZONNAHIN. Dinâmica de aplicações cohomologicamente expansíveis. *Dynamical Systems and Ergodic Theory - 32º Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA, Rio de Janeiro, 28 de Julho a 02 de Agosto de 2019 Available from: DOI: 10.13140/RG.2.2.26391.21921 https://www.researchgate.net/publication/332627348*, 2019. 3, 4, 5, 8

[12] ARMAND AZONNAHIN. Dynamics of cohomological expanding mappings. *32º Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA, Rio de Janeiro https://www.researchgate.net/publication/332627434*, 2019. 3, 4, 5, 8

[13] G. Bassanelli. A cut off theorem for plurisubharmonic currents. *Forum Math.*, (5):567–595, 1994.

[14] A.RAMANI B.GRAMMATICOS, F.NIJHOFF. Discrete painlevé equations the painlevé property. *CRM Ser. Math. Phys., Springer, New York*, pages 413–516, 1999.

[15] J.PROPP B.HASSELBLATT. Degree-growth of monomial maps. *Prépublication,arXiv math.DS/0604521.*

[16] B.MAZUR. The topology of rational points. *Experiment. Math.*, (1):35–45, 1992.

[17] B.SHIFFMAN. Applications of geometric measure theory to value distribution theory for meromorphic maps. *Value distribution theory,Dekker, New York*, pages 63–95, 1974.

[18] C.DUPONT. Exemples de lattès et domaines faiblement sphériques de cn. *Manuscripta Math. 111*, (3):357–378, 2003.

[19] C.DUPONT. Formule de pesin et applications méromorphes. *Bull. Braz. Math. Soc.*, 2005.

[20] C.FAVRE. Points périodiques d'applications birationnelles de p2. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 48*, (4):999–1023, 1998.

[21] C.FAVRE. Multiplicity of holomorphic functions. *Math. Ann.316*, (2):355–378, 2000.

[22] C.FAVRE. Les applications monomiales en deux dimensions. *Michigan Math. J. 51*, (3):467–475, 2003. 7

[23] M.JONSSON C.FAVRE. Eigenvaluations. *Preprint ArXivmath.DS/0410417*.

[24] M.JONSSON C.FAVRE. Brolin's theorem for curves in two complex dimensions. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 53*, (5):1461–1501, 2003.

[25] M.JONSSON C.FAVRE. The valuative tree. *Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin*, (1853), 2004.

[26] V.GUEDJ C.FAVRE. Dynamique des applications rationnelles des espaces multiprojectifs. *Indiana Univ. Math. J. 50*, (2):881–934, 2001.

[27] J.Y. Chemin. Théorie des distributions et analyse de fourier. *cours à l'école polytechnique de Paris.*, 2003.

[28] C.McMULLEN. Dynamics on k3 surfaces , salem numbers and siegel disks. *J. Reine Angew. Math.*, (545):201–233, 2002.

[29] C.McMULLEN. Algebra and dynamics. *Notes de cours, Harvard*, 2004.

[30] C.McMULLEN. Dynamics on blowups of the projective plane. *Prépublication*, 2005.

[31] C.SABOT. Spectral properties of self-similar lattices and iteration of rational maps. *Mém. Soc. Math. Fr.*, (92), 2003. 7

[32] D.COMAN. On the dynamics of a class of quadratic polynomial automorphisms of c3. *Discrete Contin. Dyn. Syst. 8*, (1):55–67, 2002.

[33] V.GUEDJ D.COMAN. Invariant currents and dynamical lelong numbers. *J. Geom. Anal. 14*, (2):199–213, 2004.

[34] D.DAIGLE. Birational endomorphisms of the affine plane. *J.Math. Kyoto Univ. 31*, (2):329–358, 1991.

[35] G. de Rham. Differentiable manifolds. forms, currents, harmonic forms. *Springer Verlag, Berlin*, (266), 1984.

[36] J.P. Demailly. Complex analytic geometry. *available at www.fourier.ujf grenoble.fr/demailly.*

[37] J.P. Demailly. Monge ampère operators, lelong numbers and intersection theory in complex analysis and geometry. *Plemum Press*, pages 115–193, 1993.

[38] C.HOFFMAN D.HEICKLEN. Rational maps are d-adic bernoulli. *Ann. of Math. 156*, (1):103–114, 2002.

[39] D.JACKSON. Invariant curves for birational maps. *PhD Thesis,Univ. of Notre Dame*, 2005.

[40] D.RUELLE. An inequality for the entropy of differentiable maps. *Bol. Soc. Brasil. Mat. 9*, (1):83–87, 1978.

[41] D.SULLIVAN. Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Invent. Math.*, (36):225–255, 1976.

[42] D.VOLNY. On limit theorems and category for dynamical systems. *Yokohama Math. J. 38*, (1):29–35, 1990.

[43] E.AMERIK. On endomorphisms of projective bundles. *Manuscripta Math. 111*, (1):17–28, 2003.

[44] A.Van de VEN E.AMERIK, M.ROVINSKY. A boundedness theorem for morphisms between threefolds. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 49*, (2):405–415, 1999.

[45] F.CAMPANA E.AMERIK. Fibrations méromorphes sur certaines variétés de classe canonique triviale. *Prépublication arxiv/math.AG/0510299.*

[46] F.CAMPANA E.AMERIK. Exceptional points of an endomorphism of the projective plane. *Math. Z. 249*, (4):741–754, 2005.

[47] E.BEDFORD. On the dynamics of birational mappings of the plane. *J.of Korean Math.Soc. 40*, (3):373–390, 2003. 1

[48] A.TAYLOR E.BEDFORD. A new capacity for plurisubharmonic functions. *Acta Math. 149*, (1):1–40, 1982.

[49] J.DILLER E.BEDFORD. Dynamics of a two parameter family of plane birational maps : maximal entropy. *Preprint arXiv math.DS/0505062.*

[50] J.DILLER E.BEDFORD. Energy and invariant measures for birational surface maps. *Duke Math.J. 128*, (2):331–368, 2005.

[51] J.DILLER E.BEDFORD. Real and complex dynamics of a family of birational maps of the plane : the goldenmean subshift. *Am.J.of Math.*, (127):595–646, 2005.

[52] J.SMILLIE E.BEDFORD. Polynomial diffeomorphisms of c2 : currents, equilibrium measure and hyperbolicity. *Invent.Math. 103*, (1):69–99, 1991. 5

[53] J.SMILLIE E.BEDFORD. Polynomial diffeomorphisms of c2. iii. ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure. *Math. Ann. 294*, (3):395–420, 1992. 5

[54] J.SMILLIE E.BEDFORD. Polynomial diffeomorphisms of c2. v. critical points and lyapunov exponents. *J. Geom. Anal. 8*, (3):349–383, 1998.

[55] J.SMILLIE E.BEDFORD, M.LYUBICH. Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of c2. *Invent. Math. 114*, (1):277–288, 1993.

[56] J.SMILLIE E.BEDFORD, M.LYUBICH. Polynomial diffeomorphisms of c2. iv. the measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math. 112*, (1):77–125, 1993.

[57] K.KIM E.BEDFORD. Degree growth of matrix inversion : birational maps of symmetric, cyclic matrices. *Preprint arXiv math.DS/0512507.*

[58] K.KIM E.BEDFORD. Dynamics of rational surfaces automorphisms: linear fractional recurrences. *Prépublication (2006).*

[59] K.KIM E.BEDFORD. Periodicities in linear fractional recurrences. *Preprint arXiv math.DS/0509645.*

[60] V.PAMBUCCIAN E.BEDFORD. Dynamics of shift-like polynomial diffeomorphisms of cn. *N. Conform. Geom. Dyn.*, (2):45–55, 1998.

[61] E.GAVOSTO. Attracting basins in p2. *J. Geom. Anal. 8*, (3):433–440, 1998.

[62] E.GHYS. Holomorphic anosov systems. *Invent. Math. 119*, (3):585–614, 1995.

[63] A.VERJOVSKY E.GHYS. Locally free holomorphic actions of the complex affine group. *World Sci. Publishing, River Edge, NJ*, pages 201–217, 1994.

[64] E.I.DINABURG. A correlation between topological entropy and metric entropy. *Dokl. Akad. Nauk SSSR 190*, pages 19–22, 1970.

[65] E.M.CIRKA. Complex analytic sets. *Mathematics and its Applications (Soviet Series),Kluwer Academic Publishers Group,Dordrecht*, (46), 1989.

[66] C.DUPONT F.BERTELOOT. Une caractérisation des endomorphismes de lattès par leur mesure de green. *Comment.Math. Helv.*, (80):433–454, 2005.

[67] J.-J.LOEB F.BERTELOOT. Une caractérisation géométrique des exemples de lattès de pk. *Bull. Soc.Math. France 129*, (2):175–188, 2001.

[68] V.MAYER F.BERTELOOT. Rudiments de dynamique holomorphe. *Cours Spécialisés, 7. Société Mathématique de France*, 2001.

[69] H. Federer. Geometric measure theory. *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band Springer Verlag New York Inc., New York*, (153), 1969.

[70] F.LEDRAPPIER. Quelques propriétés ergodiques des applications rationnelles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 299*, (1):37–40, 1984.

[71] F.PRZYTYCKI. Hausdorff dimension of harmonic measure on the boundary of an attractive basin for a holomorphic map. *Invent. Math. 80*, (1):161–179, 1985.

[72] F.BERTELOOT G.BASSANELLI. Bifurcation currents in holomorphic dynamics on pk. *Journal de Crelle.*

[73] G.BUZZARD. Infinitely many periodic attractors for holomorphic maps of 2 variables. *Ann. of Math. (2) 145*, (2):389–417, 1997.

[74] R.C. Gunning. Introduction to holomorphic functions in several variables. *Wadsworh and Brooks*, 1990.

[75] H.Alexander. Projective capacity. *Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.*, (100):3–27, 1981.

[76] H.BROLIN. Invariant sets under iteration of rational functions. *Ark. Mat.*, (6):103–144, 1965. 3

[77] H.deTHELIN. Sur la construction de mesures selles. *Ann. Inst. Fourier.*

[78] H.deTHELIN. Sur les exposants de lyapounov des applications méromorphes. *Prépublication arXiv math.DS/0609628.*

[79] H.deTHELIN. Un critère de laminarité locale en dimension quelconque. *Prépublication arxiv/math.CV/0512028.*

[80] H.deTHELIN. Sur la laminarité de certains courants. *Ann.Sci. Ecole Norm. Sup. 37*, (2):304–311, 2004.

[81] H.deTHELIN. Un phénomène de concentration de genre. *Math. Ann.*, (332):483–498, 2005.

[82] L. Hormander. The analysis of linear partial differential operators i, ii. *Springer Verlag*, 1983.

[83] L. Hormander. An introduction to complex analysis in several variables. *North Holland Publishing Co., Amsterdam*, (7), 1990.

[84] H.SKODA. Prolongement des courants, positifs, fermés de masse finie. *Invent. Math. 66*, (3):361–376, 1982.

[85] D. Huybrechts. Complex geometry. an introduction. *Universitext, Springer Verlag, Berlin*, 2005.

[86] L.DeMARCO I.BINDER. Dimension of pluriharmonic measure and polynomial endomorphisms of cn. *Int. Math. Res.Not*, (11):613–625, 2003.

[87] Ya.G.SINAI I.P.CORNFELD, S.V.FOMIN. Ergodic theory. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, New York*, (245), 1982.

[88] C.SOULÉ J.-B.BOST, H.GILLET. Heights of projective varieties and positive green forms. *J. Amer. Math. Soc. 7*, (4):903–1027, 1994.

[89] J.-E.FORNAESS. Dynamics in several complex variables. *American Mathematical Society, Providence,RI*, 1996.

[90] H.WU J.-E.FORNAESS. Classification of degree 2 polynomial automorphisms of c3. *Publ. Mat. 42*, (1):195–210, 1998.

[91] N.SIBONY J.-E.FORNAESS. Complex hénon mappings in c2 and fatou-bieberbach domains. *Duke Math. J. 65*, (2):345–380, 1992.

[92] N.SIBONY J.-E.FORNAESS. Complex dynamics in higher dimension. i. complex analytic methods in dynamical systems. *Astérisque No. 222*, (5):201–231, 1994. 5

[93] N.SIBONY J.-E.FORNAESS. Complex dynamics in higher dimensions. notes partially written by estela a. gavosto. *Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, (439):131–186, 1994. 5

[94] N.SIBONY J.-E.FORNAESS. Complex dynamics in higher dimension. ii. modern methods in complex analysis. *Ann. of Math. Stud.*, (137):135–182, 1995. 5

[95] N.SIBONY J.-E.FORNAESS. Dynamics of p2 (examples).laminations and foliations in dynamics, geometry and topology. *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, (269):47–85, 2001.

[96] J.-P.DEMAILLY. Complex analytic and differential geometry. *Free accessible book (http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/books.html).*

[97] J.-Y.BRIEND. La propriété de bernoulli pour les endomorphismes de pk. *Ergodic Theory Dynam. Systems 22*, (2):323–327, 2002.

[98] J.DUVAL J.-Y.BRIEND. Exposants de liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de cpk. *Acta Math. 182*, (2):143–157, 1999. 4, 5

[99] J.DUVAL J.-Y.BRIEND. Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de pk(c). *Publ. Math.Inst. Hautes Etudes Sci.*, (93):145–159, 2001. 4, 5

[100] M.SHISHIKURA J.-Y.BRIEND, S.CANTAT. Linearity of the exceptional set for maps of pk. *Math. Ann. 330*, (1):39–43, 2004.

[101] C. Soulé J.B. Bost, H. Gillet. Heights of projective varieties and positive green forms. *J. Amer. Math. Soc.*, (4):903–1027, 1994.

[102] J.BUZZI. The coding of non-uniformly expanding maps with application to endomorphisms of pk. *Ergodic Theory Dynam. Systems 23*, (4):1015–1024, 2003.

[103] J.DILLER. Dynamics of birational maps of p2. *Indiana Univ.Math. J. 45*, (3):721–772, 1996.

[104] J.DILLER. Birational maps, positive currents, and dynamics. *Michigan Math. J. 46*, (2):361–375, 1999.

[105] J.DILLER. Invariant measure and lyapunov exponents for birational maps of p2. *Comment. Math. Helv. 76*, (4):754–780, 2001.

[106] A.SOMMESE J.DILLER, D.JACKSON. Invariant curves for birational surface maps. *T.A.M.S.*

[107] C.FAVRE J.DILLER. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math. 123*, (6):1135–1169, 2001. 7

[108] V.GUEDJ J.DILLER. Regularity of dynamical green functions. *Preprint arXiv math.CV/0601216.*

[109] V.GUEDJ J.DILLER, R.DUJARDIN. Dynamics of surfaces endomorphisms. *Prépublication (2006).* 7

[110] N. Sibony J.E. Fornaess. Oka's inequality for currents and applications. *Math. Ann.*, (301):399–419, 1995.

[111] J.H.HUBBARD. The hénon mapping in the complex domain. *Chaotic dynamics and fractals ,Atlanta, Ga.*, pages 101–111, 1985.

[112] P.PAPADOPOL J.H.HUBBARD. Newton's method applied to two quadratic equations in c2 viewed as a global dynamical system. *Memoirs of the A.M.S.*

[113] P.PAPADOPOL J.H.HUBBARD. Superattractive fixed points in cn. *Indiana Univ. Math. J. 43*, (1):321–365, 1994.

[114] R.W.OBERSTE-VORTH J.H.HUBBARD. Hénon mappings in the complex domain. i. the global topology of dynamical space. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, (79):5–46, 1994.

[115] R.W.OBERSTE-VORTH J.H.HUBBARD. Hénon mappings in the complex domain. ii. projective and inductive limits of polynomials. *Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, (464):89–132, 1995.

[116] V.VESELOV J.H.HUBBARD, P.PAPADOPOL. A compactification of hénon mappings in c2 as dynamical systems. *Acta Math. 184*, (2):203–270, 2000.

[117] J.KEUM. Automorphisms of a generic jacobian kummer surface. *Geom. Dedicata 76*, (2):177–181, 1999.

[118] J.MILNOR. On lattès maps. *Preprint arXivmath.DS/0402147.* 1

[119] J.MILNOR. Dynamics in one complex variable. *Introductory lectures. Friedr. Vieweg , Sohn, Braunschweig*, 1999. 1

[120] J.SMILLIE. The entropy of polynomial diffeomorphisms of c2. *Ergodic Theory Dynam. Systems 10*, (4):823–827, 1990.

[121] V.SRINIVAS K.H.PARANJAPE. Self-maps of homogeneous spaces. *Invent. Math. 98*, (2):425–444, 1989.

[122] K.MAEGAWA. Classification of quadratic polynomial automorphisms of c3 from a dynamical point of view. *Indiana Univ. Math. J. 50*, (2):935–951, 2001.

[123] T.GAMELIN L.CARLESON. Complex dynamics. *Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York*, 1993. 1

[124] L.DeMARCO. Dynamics of rational maps : Lyapunov exponents,bifurcations, and capacity. *Math. Ann. 326*, (1):43–73, 2003.

[125] P. Lelong. Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives. *Dunod Paris*, 1968.

[126] F.TOVENA M.ABATE, F.BRACCI. Index theorems for holomorphic self-maps. *Ann. of Math.*, (2):819–864, 2004.

[127] G.ROLLET M.BERNARDO, T.T.TRUONG. The discrete painlevé i equations : transcendental integrability and asymptotic solutions. *J. Phys. A 34*, (15):3215–3252, 2001.

[128] A.KATOK M.BRIN. On local entropy. *Geometric dynamics (Rio de Janeiro), Lecture Notes in Math.,Springer, Berlin*, (1007):30–38, 1983.

[129] M.URBANSKI M.DENKER, F.PRZYTYCKI. On the transfer operator for rational functions on the riemann sphere. *Ergod.Th. Dyn.Syst. 16*, (2):255–266, 1996.

[130] M.GROMOV. Convex sets and kähler manifolds. *World Sci. Publishing, Teaneck, NJ*, (49):1–38, 1990.

[131] M.GROMOV. On the entropy of holomorphic maps. *L'Enseignement Mathématique*, (49):217–235, 2003.

[132] M.JONSSON. Dynamics of polynomial skew products on c2. *Math. Ann. 314*, (3):403–447, 1999.

[133] M.JONSSON. Ergodic properties of fibered rational maps. *Ark. Mat. 38*, (2):281–317, 2000.

[134] M.LYUBICH. Entropy properties of rational endomorphisms of the riemann sphere. *Ergodic Theory Dynam. Systems 3*, (3):351–385, 1983. 3

[135] F.PRZYTYCKI M.MISIUREWICZ. Topological entropy and degree of smooth mappings. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sr. Sci. Math. Astronom. Phys. 25*, (6):573–574, 1977.

[136] M.SHISHIKURA. The hausdorff dimension of the boundary of the mandelbrot set and julia sets. *Ann. of Math. 147*, (2):225–267, 1998.

[137] M.VIANA. Stochastic dynamics of deterministic systems. *IMPA*, (21), 1997.

[138] M.ZINSMEISTER. Formalisme thermodynamique et systèmes dynamiques holomorphes. *Panoramas et Synthèses, . Société Mathématique de France, Paris*, (4):627–649, 1996.

[139] M. Méo. Image inverse d'un courant positif fermé par une application surjective. *C.R.A.S.*, (322), 1996.

[140] J.MAILLARD N.ABARENKOVA. Real topological entropy versus metric entropy for birational measure-preserving transformations. *Phys. D*, (3):387–433, 2000.

[141] R. Narasimhan. Introduction to the theory of analytic spaces. *Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York.*, (25), 1966.

[142] N.NAKAYAMA. Ruled surfaces with non-trivial surjective endomorphisms. *Kyushu J. Math. 56*, (2):433–446, 2002.

[143] N.SIBONY. Dynamique des applications rationnelles de pk. *Dynamique et géométrie complexes, Panorama et Synthèses*, 1999.

[144] P.M.WONG N.SIBONY. Some remarks on the casorati-weierstrass theorem. *Ann. Polon. Math.*, (39):165–174, 1981.

[145] O.SESTER. Hyperbolicité des polynomes fibrés. *Bull. Soc.Math. France 127*, (3):393–428, 1999.

[146] J.HARRIS P.-A.GRIFFITHS. Principles of algebraic geometry. *CRM Ser. Math. Phys., Springer, New York*, 1978.

[147] PAN. Sur le degré dynamique des transformations de cremona du plan qui stabilisent une courbe irrationnelle non- elliptique. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris 341*, (7):439–443, 2005.

[148] J. Harris Ph. Griffiths. Principles of algebraic geometry. *John Wiley. Inc*, 1994.

[149] P.LELONG. Intégration sur un ensemble analytique complexe. *Bull. Soc. Math. France*, (85):239–262, 1957.

[150] P.LELONG. Eléments extrémaux sur le cône des courants positifs fermés. *Lecture Notes in Math. Springer,Berlin*, (332):112–131, 1973.

[151] P.WALTERS. An introduction to ergodic theory. *Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Berlin*, (79), 1982.

[152] J. Polking R. Harvey. Extending analytic objects. *Comm. Pure Appl. Math.*, (28):701–727, 1975.

[153] R.BOWEN. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (181):509–510, 1973.

[154] M.DENKER R.BURTON. On the central limit theorem for dynamical systems. *Trans. Amer. Math. Soc. 302*, (2):715–726, 1987.

[155] R.DUJARDIN. Laminar currents in p2. *Math. Ann. 325*, (4):745–765, 2003.

[156] R.DUJARDIN. Hénon-like mappings in c2. *Amer. J. Math.126*, (2):439–472, 2004.

[157] R.DUJARDIN. Sur l'intersection des courants laminaires. *Publ. Mat. 48*, (1):107–125, 2004.

[158] R.DUJARDIN. Structure properties of laminar currents on p2. *J. Geom. Anal. 15*, (1):25–47, 2005.

[159] R.DUJARDIN. Laminar currents and birational dynamics. *Duke Math. J. 131*, (2):219–247, 2006.

[160] C.FAVRE R.DUJARDIN. Distribution of rational maps with a preperiodic critical point. *Prépublication arXivmath.DS/0601612.*

[161] R.LAZARSFELD. Positivity in algebraic geometry. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.*

[162] R.MAÑE. The hausdorff dimension of invariant probabilities of rational maps. *Lecture Notes in Math., Springer, Berlin*, (1331):86–117, 1988.

[163] L.Nirenberg S. Chern, H. Levine. Intrinsic norms on a complex manifold. *Univ. Tokyo Press*, pages 119–139, 1969.

[164] M.JONSSON S.BOUCKSOM, C.FAVRE. Degree growth of meromorphic surface maps. *preprint arXiv math.DS/0608267.*

[165] J.-M.MAILLARD S.BOUKRAA. Factorization properties of birational mappings. *Physica A*, (220):403–470, 1995.

[166] S.CANTAT. Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux. *Prépublication.*

[167] S.CANTAT. Dynamique des automorphismes des surfaces k3. *Acta Math. 187*, (1):1–57, 2001.

[168] S.CANTAT. Endomorphismes des variétés homogènes. *Enseign.Math. (2) 49*, (3-4):237–262, 2003.

[169] S.CANTAT. Exemples de lattès et de kummer. *Prépublication*, 2005.

[170] C.FAVRE S.CANTAT. Symétries birationnelles des surfaces feuilletées. *J. Reine Angew. Math.*, (561):199–235, 2003.

[171] S.LEBORGNE S.CANTAT. Théorème limite central pour les endomorphismes holomorphes et les correspondances modulaires. *I.M.R.N.*, (56):3479–3510, 2005.

[172] L. Schwartz. Théorie des distributions. *Hermann, Paris*, 1966.

[173] S.FRIEDLAND. Entropy of polynomial and rational maps. *Ann. of Math. 133*, (2):359–368, 1991.

[174] J.MILNOR S.FRIEDLAND. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems 9*, (1):67–99, 1989.

[175] S.HEINEMANN. Julia sets for holomorphic endomorphisms of cn. *Ergodic Theory Dynam. Systems 16*, (6):1275–1296, 1996.

[176] N. Sibony. Quelques problèmes de prolongement de courants en analyse complexe. *Duke Math. J.*, (1):157–197, 1985.

[177] Y.T. Siu. Analyticity of sets associated to lelong numbers and the extension of closed positive currents. *Invent. Math.*, (27):53–156, 1974.

[178] T.OCHIAI S.KOBAYASHI. Meromorphic mappings onto compact complex spaces of general type. *Invent. Math. 31*, (1):7–16, 1975.

[179] S.LAMY. Une preuve géométrique du théorème de jung. *Enseign.Math. 48*, (3-4):291–315, 2002.

[180] S.LAMY. Sur la structure du groupe d'automorphismes de certaines surfaces affines. *Publ. Mat. 49*, (1):3–20, 2005.

[181] T.UEDA S.MOROSAWA. Holomorphic dynamics. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge*, (66), 2000.

[182] S.NEWHOUSE. The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, (50):101–151, 1979.

[183] N. Sibony T.C. Dinh. Super-potentials of positive closed currents, intersection theory and dynamics. *arXiv math.CV/0703702.*

[184] N. Sibony T.C. Dinh. Decay of correlations and the central limit theorem for meromorphic maps. *Comm. Pure Appl. Math.*, (5):754–768, 2006.

[185] N. Sibony T.C. Dinh. Distribution des valeurs de transformations méromorphes et applications. *Comment. Math. Helv.*, (1):221–258, 2006.

[186] N. Sibony T.C. Dinh. Geometry of currents, intersection theory and dynamics of horizontal-like maps. *Ann. Inst. Fourier ,Grenoble*, (2):423–457, 2006.

[187] N. Sibony T.C. Dinh. Pull-back of currents by holomorphic maps. *Manuscripta Math.*, (123):357–371, 2007.

[188] N. Sibony T.C. Dinh, V.A. Nguyen. Dynamics of horizontal-like maps in higher dimension. *Adv. Math.*, (219):1689–1721, 2008.

[189] N. Sibony T.C. Dinh, V.A. Nguyen. Exponential estimates for plurisubharmonic functions and stochastic dynamics. *preprint arXiv 0801.1983*, 2008.

[190] T.C.DINH. Decay of correlation for hénon maps. *Acta Math.*, (195):253–264, 2005.

[191] T.C.DINH. Suites d'applications méromorphes multivaluées et courants laminaires. *J. Geom. Anal. 15*, (2):207–227, 2005.

[192] C.DUPONT T.C.DINH. Dimension de la mesure d'équilibre d'applications méromorphes. *J. Geom. Anal. 14*, (4):613–627, 2004.

[193] N.SIBONY T.C.DINH. Dynamique des applications d'allure polynomiale. *J. Math. Pures Appl. 82*, (4):367–423, 2003.

[194] N.SIBONY T.C.DINH. Dynamique des applications polynomiales semi-régulières. *Ark. Mat. 42*, (1):61–85, 2004.

[195] N.SIBONY T.C.DINH. Groupes commutatifs d'automorphismes d'une variété kählérienne compacte. *Duke Math. J.123*, (2):311–328, 2004.

[196] N.SIBONY T.C.DINH. Regularization of currents and entropy. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 37*, (6):959–971, 2004.

[197] N.SIBONY T.C.DINH. Dynamics of regular birational maps in pk. *J. Functional Anal. 222*, (1):202–216, 2005.

[198] N.SIBONY T.C.DINH. Green currents for holomorphic automorphisms of compact kähler manifolds. *J. Amer. Math.Soc. 18*, (2):291–312, 2005.

[199] N.SIBONY T.C.DINH. Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle. *Annals of Math*, (161), 2005.

[200] N.SIBONY T.C.DINH. Decay of correlations and central limit theorem for meromorphic maps. *Comm. Pure Appl. Math.59*, (5):754–768, 2006.

[201] N.SIBONY T.C.DINH. Value distribution of meromorphic transforms and applications. *Comment. Math. Helv. 81*, (1):221–258, 2006.

[202] H. Triebel. Interpolation theory, function spaces, differential operators. *North Holland*, 1978.

[203] T.UEDA. Fatou sets in complex dynamics on projective spaces. *J. Math. Soc. Japan 46*, (3):545–555, 1994.

[204] Yu.I.MANIN V.A.ISKOVSKIKH. Three-dimensional quartics and counterexamples to the lüroth problem. *Mat. Sb. 86*, pages 140–166, 1971.

[205] V.GUEDJ. Dynamics of polynomial mappings of c2. *Amer. J. Math. 124*, (1):75–106, 2002.

[206] V.GUEDJ. Equidistribution towards the green current. *Bull.Soc. Math. France 131*, (3):359–372, 2003.

[207] V.GUEDJ. Decay of volumes under iteration of meromorphic mappings. *Ann.Inst.Fourier Grenoble 54*, (7):2369–2386, 2004.

[208] V.GUEDJ. Dynamics of quadratic polynomial mappings of c2. *Michigan Math. J. 52*, (3):627–648, 2004.

[209] V.GUEDJ. Courants extrémaux et dynamique complexe. *Ann.Sc.ENS*, (38):407–426, 2005.

[210] V.GUEDJ. Entropie topologique des applications méromorphes. *Ergodic Th., Dyn.Syst.*, (25):1847–1855, 2005.

[211] V.GUEDJ. Ergodic properties of rational mappings with large topological degree. *Annals of Mathematics 161*, (3), 2005.

[212] A.ZERIAHI V.GUEDJ. Monge-ampère operators on compact kähler manifolds. *Prépublication,arXiv math.CV/0504234*.

[213] A.ZERIAHI V.GUEDJ. Intrinsic capacities on compact kähler manifolds. *J.Geom.Anal. 15*, (4):607–639, 2005.

[214] N.SIBONY V.GUEDJ. Dynamics of polynomial automorphisms of ck. *Ark. Mat. 40*, (2):207–243, 2002.

[215] G. Vigny. Dirichlet like space and capacity in complex analysis in several variables. *J. Funct. Anal.*, (1):247–277, 2007.

[216] C. Voisin. Théorie de hodge et géométrie algébrique complexe. *Cours Spécialisés, Société Mathématique de France, Paris*, (10), 2002.

[217] J.-T.YU V.SHPILRAIN. Birational morphisms of the plane. *Proc. Amer. Math. Soc. 132*, (9):2511–2515, 2004.

[218] F.W. Warner. Foundations of differentiable manifolds and lie groups. *Springer Verlag*, 1971.

[219] A.VAN de VEN W.BARTH, C.PETERS. Compact complex surfaces. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete . Springer-Verlag, Berlin*, (4), 1984.

[220] X.BUFF. On the bieberbach conjecture and holomorphic dynamics. *Proc. Amer. Math. Soc. 131*, (3):755–759, 2003.

[221] X.BUFF. La mesure d'équilibre d'un endomorphisme de pk. *Séminaire Bourbaki, novembre*, 2004.

[222] A.CHERITAT X.BUFF. Ensembles de julia quadratiques de mesure de lebesgue strictement positive. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, (341):669–674, 2005.

[223] S.T. Yau. On the ricci curvature of a compact kähler manifold and the complex monge ampère equation. i. *Comm. Pure Appl. Math*, (3):339–411, 1978.

[224] Y.FUJIMOTO. Endomorphisms of smooth projective 3-folds with non-negative kodaira dimension. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. 38*, (1):33–92, 2002.

[225] Y.PESIN. Dimension theory in dynamical systems. *Chicago Lectures in Mathematics,University of Chicago Press, Chicago*, 1997.

[226] Y.YOMDIN. Volume growth and entropy. *Israel J. Math. 57*, (3):285–300, 1987.